1 Einführung

1.1 Mechanische Hilfsmittel

Mechanische Rechenhilfsmittel

- Abakus ca. 3000 Jahre alt (hier die chinesische Variante, der Suànpán, ca. 2200 alt)
- Addiator(Stangenaddierer) ca. 1920 - 1982, Prinzip ist von 1889
- Logarithmenrechenschieber, bis ca. 1975, das Prinzip wurde ca. 1620 - 1630 entdeckt

1.2 Überblick Vedische Mathematik

Überblick Vedische Mathematik

- Jagadguru Swami Sri Bharati Krishna Tirthaji Maharaja (März 1884 – Februar 2, 1960) und sein Buch » Vedic Mathematics or Sixteen simple Mathematical Formulae from the Vedas (For One-line Answers to all Mathematical Problems) « [VM65];
  - aber, die Sutras sind nicht in den Vedas zu finden
  - *keine neue Mathematik* , sondern eine Sammlung von Algorithmen für bekannte Dinge
- Aktuell werden Chip-Designs und Algorithmen diskutiert, die diese Verfahren zu Multiplikation und zur FFT nutzen (siehe die Links am Ende des Wikipedia-Artikels zu Vedic Math)

Die sechzehn Sutras

1. Eins mehr als der davor
2. Alle von 9 und die letzte von 10
3. Vertikal und kreuzweise
4. Stelle um und wende an
5. Wenn die Kombination dieselbe ist, ist es Null
6. Ist das eine das Verhältnis, ist das andere Null
7. Bei Addition und bei Subtraktion
8. Bei der Vervollständigung oder Unvervollständigung

9. Unterschiedliches Differential- und Integralrechnen
10. Bei Unvollständigkeit
11. Spezifisch und allgemein
12. Die Verbliebene zur letzten Stelle
13. Das Letzte und zweimal der Vorletzte
14. Einer weniger als der davor
15. Das Produkt der Summe
16. Alle Multiplikatoren

Die Sub-Sutras

1. Proportionalität
2. Die Verbleibende bleibt konstant
3. Die Erste zur Ersten und die Letzte zur Letzten
4. Der Multiplikant von 7 ist 143
5. Bei Berührung
6. Ziehe die Differenz ab
7. Was immer die Differenz ist, ziehe die Summe ab und stelle das Quadrat der Differenz her
8. Summiere das Letzte mit 10
9. Nur die Letzten
10. Die Summe des Produkts
11. Alternativ mit Ausschluss und Beibehaltung
12. Bei bloßer Beobachtung
13. Das Produkt der Summe ist die Summe des Produkts
14. Mit dem Symbol

2 Ausgewählte Verfahren der Vedischen Mathematik

2.1 Quadrate

Quadrate von Zahlen, die auf 5 enden

- $05^2 = 25$, $15^2 = 2\,25$, $25^2 = 6\,25$, $35^2 = 12\,25$, $45^2 = 20\,25$, $55^2 = 30\,25$, ...
- wer erkennt ein Muster?
- Sutra: Eins mehr als der davor
  - »der davor« ist/sind die Ziffer(n) a vor der 5,
  - dieses a wird mit $a + 1$ multipliziert und das Ergebnis der 25 vorangestellt
- Herleitung:

$$\begin{aligned}(a \cdot 10 + 5)^2 &= a^2 \cdot 100 + 2 \cdot a \cdot 10 \cdot 5 + 25\\ &= (a^2 + a) \cdot 100 + 25\\ &= a \cdot (a + 1) \cdot 100 + 25\end{aligned}$$

- $85^2 =?$, $95^2 =?$, $125^2 =?$

(All)gemeinere Quadrate in der Nähe einer 10er-Potenz

- $99^2 = 9801$, $98^2 = 9604$, $101^2 = 10201$, $102^2 = 10404$
- wer erkennt ein Muster?
- Sutra: Was immer die Differenz ist, ziehe die Summe ab und stelle das Quadrat der Differenz her (»whatever the extent of its deficiency, lessen it still further to that very extent; and also set up the square (of that deficiency)«.)
- Herleitung:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \Rightarrow a^2 = (a + b)(a - b) + b^2$$

  Wähle b so, dass entweder $a + b$ oder $a - b$ eine 10er Potenz ist!

- $88^2 =?$, $116^2 =?$, $1010^2 =?$

Das gleiche Prinzip werden wir gleich für die Multiplikation von Zahlen in der Nähe einer 10er-Potenz nochmals antreffen.

2.2 Produkte

Vorne gleich, Summe der Einerstellen ist 10

- $23 \cdot 27 = 621$, $14 \cdot 16 = 224$, $72 \cdot 78 = 5616$
- wer erkennt ein Muster?
- Sutra: Eins mehr als der davor.
- Herleitung: Sei a beliebig, $b, c \in \{1, \ldots, 9\}$ mit $b + c = 10$

$$\begin{aligned}(a \cdot 10 + b)(a \cdot 10 + c) &= 100 \cdot a \cdot a \\ &\quad + \underbrace{10 \cdot a \cdot b + 10 \cdot a \cdot c}_{=10 \cdot a(b+c)} + b \cdot c \\ &= a \cdot (a+1) \cdot 100 + b \cdot c\end{aligned}$$

- Die Regel mit den Quadraten, die auf 5 enden, ist ein Spezialfall dieser Regel.
- $54 \cdot 56 =?$, $\quad 121 \cdot 129 =?$

Nützlichkeit der beiden vorigen Regeln, über die Spezialfälle hinaus

Obwohl die beiden vorigen Regeln nur in speziellen Situationen funktionieren, kann eine »unpassende« Multiplikationsaufgabe u.U. auf sie zurückgeführt werden:

- $19 \cdot 12 = 19 \cdot 11 + 19 = 209 + 19 = 228$
- $65 \cdot 67 = 65 \cdot 65 + 2 \cdot 65 = 4225 + 130 = 4355$
- $72 \cdot 77 = 73 \cdot 77 - 77 = 5621 - 77 = 5544$

Multiplikation mit 11

- $11 \cdot 23 = 253$, $\quad 11 \cdot 45 = 495$, $\quad 11 \cdot 52 = 572$
- wer erkennt ein Muster?
- Zur Multiplikation mit 11 werden die erste und letzte Ziffer der zweiten Zahl hingeschrieben und dazwischen die Summe der einzelnen benachbarten Ziffern der zweiten Zahl (Übertrag beachten).
- Beispiel: $11 \cdot 12 = 132$, $\quad 11 \cdot 67 = 6_1 37 = 737$
- Herleitung: Betrachte das konventionelle Verfahren, bei dem die Zwischenergebnisse um ein Stelle versetzt untereinander geschrieben werden.
- $11 \cdot 72 =?$, $\quad 11 \cdot 87 =?$, $\quad 11 \cdot 123 =?$

Produkte von Zahlen naher gleicher Zehnerpotenz, Beispiel 1

Um z.B. $88 \cdot 95$ zu berechnen, bestimmen wir jeweils den Abstand zu 100 und tragen diese vier Zahlen in ein Schema ein (auch gerne im Kopf):

$$\begin{array}{ccc} 88 & \longrightarrow & -12 \\ 95 & \longrightarrow & -05 \\ \hline & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 88 & \longrightarrow & -12 \\ 95 & \longrightarrow & -05 \\ \hline 83 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 88 & \longrightarrow & -12 \\ 95 & \longrightarrow & -05 \\ \hline 83 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 88 & \longrightarrow & -12 \\ & & | \\ 95 & \longrightarrow & -05 \\ \hline 83 & & 60 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 88 & \longrightarrow & -12 \\ & & | \\ 95 & \longrightarrow & -05 \\ \hline 83 & & 60 \end{array}$$

$83 = 88 - 5 = 95 - 12, \qquad 60 = -5 \cdot -12$

Damit ist $88 \cdot 95 = 83 \cdot 100 + 60 = 8360$.

Produkte von Zahlen naher gleicher Zehnerpotenz, Beispiel 2

Das klappt auch für dreistellige Zahlen und die Faktoren können größer oder kleiner als die 10er Potenz sein.

Beispiel $107 \cdot 87$, wir rechnen nahe der Basis 100:

$$\begin{array}{rcl} 87 & \longrightarrow & -13 \\ 107 & \longrightarrow & +\ 7 \\ \hline & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 87 & \longrightarrow & -13 \\ 107 & \longrightarrow & +\ 7 \\ \hline 94 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 87 & \longrightarrow & -13 \\ 107 & \longrightarrow & +\ 7 \\ \hline 94 & & -91 \end{array}$$

$94 = 87 + 7 = 107 - 13, \qquad -91 = -13 \cdot 7$

Damit ist $87 \cdot 107 = 94 \cdot 100 - 91 = 9400 - 91 = 9309$.

Produkte von Zahlen naher gleicher Zehnerpotenz, Prinzip

- Sutra: Alle von 9 und die letzte von 10.

  Das bezieht sich auf den Schritt zur Bestimmung des Abstandes zu 10er Potenz und kann immer verwendet werden, wenn von einer 10er Potenz eine Zahl subtrahiert werden soll. Damit spart man sich den Übertrag beim konventionellen Rechnen von Rechts nach Links.

- Herleitung: Seien $x = 10^n + a, \quad y = 10^n + b$, dann ist

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (10^n + a)(10^n + b) \\ &= 10^{2n} + 10^n(a + b) + a \cdot b \\ &= 10^n(10^n + a + b) + a \cdot b \end{aligned}$$

- $10^n + a + b = x + b = y + a$ ist der Wert der beiden möglichen Über-Kreuz-Schritte.

- Der Autor von [VM65] führt unser $\times$ Symbol auf die Über-Kreuz Addition dieser Methode zurück.

Produkte von Zahlen naher gleicher Zehnerpotenz, andere Basen

Statt der 10er Potenz taugen auch andere Basen, je nachdem wie die Faktoren liegen. Dann muss aber die folgende Tabelle beachten: Sub-Sutra »Proportionalität«

Basis	Faktor für Überkreuz-Add.	Stellen von Multipl.	
100	1	2	
50	$\frac{1}{2}$	2	$50 = \frac{1}{2} \cdot 100$
50	5	1	$50 = 5 \cdot 10$
20	2	1	
$r \cdot 10$	r	1	$r \in \mathbb{Q}$
150	$\frac{3}{2}$	2	
250	$\frac{5}{2}$	2	
200	2	2	
$r \cdot 10^k$	r	k	$r \in \mathbb{Q}$, $k \in \mathbb{N}$

Produkte von Zahlen naher gleicher Zehnerpotenz, andere Basen, Beispiel 1

Als Beispiel die Rechnung $45 \cdot 55$:

- Basis $50 = \frac{1}{2} \cdot 100$

$$\begin{array}{rr} 55 & 5 \\ 45 & \text{-}5 \\ \hline 50 \cdot \frac{1}{2} \cdot 100 & -25 \\ = \underline{25} \cdot 100 & -25 \\ = 2475 & \end{array}$$

- Basis $50 = 5 \cdot 10$

$$\begin{array}{rr} 55 & 5 \\ 45 & \text{-}5 \\ \hline 50 \cdot 5 \cdot 10 & -25 \\ = \underline{250} \cdot 10 & -25 \\ = 2475 & \end{array}$$

Hätten wir hier mit der Basis 100 gerechnet, dann hätten wir nichts gewonnen, da auf der rechten Seite -45 und -55 zu multiplizieren gewesen wären.

Produkte von Zahlen naher gleicher Zehnerpotenz, andere Basen, Beispiel 2

Als Beispiel die Rechnung $48 \cdot 62$:

- Basis $50 = 5 \cdot 10$

48	-2
62	12
$60 \cdot 5 \cdot 10$	-24
$= 2976$	

- Basis $60 = 6 \cdot 10$

48	-12
62	2
$50 \cdot 6 \cdot 10$	-24
$= 2976$	

Warum das kleine 5×5 ausreicht

- Aus Sicht der Vedischen Mathematik können wir mit dem vorigen Verfahren Multiplikationen jenseits 5×5 auf die Multiplikation auf der rechten Seite reduzieren. Dort wird die Differenz zu 10 multipliziert.
- Diese Eigenschaft wird oft als Vorteil der Vedischen Mathematik aufgeführt.

Vertikal und kreuzweise, Beispiel 1

- wenn die vorigen Methoden nicht anwendbar sind, bleibt diese Methode, die keine Annahmen über die Zahlen macht
- sie ist ebenfalls für das Kopfrechnen optimiert, da immer nur eine Ziffer als Zwischenergebnis gehalten werden muss
- Beispiel $23 \cdot 17$

$$\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 1 & 7 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ & | \\ 1 & 7 \\ \hline & {}_{2}1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & & 3 \\ 1 & & 7 \\ \hline {}_1 & 9 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & & 3 \\ 1 & & 7 \\ \hline 3 & 9 & 1 \end{array}$$

$2 \cdot 1 | 2 \cdot 7 + 1 \cdot 3 | 3 \cdot 7 = 2 \quad {}_1 7 \quad {}_2 1 = 391$

Vertikal und kreuzweise, Beispiel 2

Beispiel $123 \cdot 234$:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$$

12

$$\begin{array}{ccc} & {}_1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$$

$(1) + 8 + 9$

$$\begin{array}{ccc} {}_1 & 8 & 2 \end{array}$$

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 1 & 2 & 3 & \\
 & 2 & 3 & 4 & \\
\hline
\end{array}
$$

$$(1)+4+6+6$$

$$
\begin{array}{ccccc}
 & {}_1 & 7 & 8 & 2 \\
1 & & 2 & & 3 \\
2 & & 3 & & 4 \\
\hline
\end{array}
$$

$$(1)+3+4$$

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 8 & 7 & 8 & 2 \\
1 & & 2 & & 3 \\
2 & & 3 & & 4 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
2 & 8 & 7 & 8 & 2
\end{array}
$$

$$1\cdot 2|1\cdot 3+2\cdot 2|1\cdot 4+3\cdot 2+2\cdot 3|2\cdot 4+3\cdot 3|3\cdot 4$$
$$=2|7|_1 6|_1 7|_1 2=28782$$

In dieser Art und Weise lässt sich die Regel auf beliebig (auch unterschiedlich) lange Faktoren anwenden.

Vertikal und kreuzweise, Prinzip

Herleitung: Seien z.B. $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \{0, \ldots, 9\}$ die Ziffern zweier dreistelliger Zahlen, dann ist das Produkt $x_1x_2x_3 \cdot y_1y_2y_3$ nach konventioneller Rechenweise (ohne Rücksicht auf Übertrag usw.):

x_1	x_2	x_3	$\cdot$	y_1	y_2	y_3
				x_1y_3	x_2y_3	x_3y_3
			x_1y_2	x_2y_2	x_3y_2	
		x_1y_1	x_2y_1	x_3y_1		
		x_1y_1	$(x_1y_2+$	$(x_1y_3+x_2y_2+$	$(x_2y_3+$	x_3y_3
	$\prod =$		$x_2y_1)$	$x_3y_1)$	$x_3y_2)$	
		$\cdot 10^4$	$\cdot 10^3$	$\cdot 10^2$	$\cdot 10$	$\cdot 1$

Das lässt sich auf Faktoren mit beliebiger (auch unterschiedlicher) Stellenzahl verallgemeinern und zeigt zum einen die Korrektheit der vedischen Methode und zum anderen deren Prinzip.

2.3 Berechnen von Kubikwurzeln (im Kopf!)

Aufgehende Kubikwurzeln von Zahlen zwischen 1000 und 1000000, (1)

Am Anfang steht eine Beobachtung über die Kuben der 10 Ziffern:

x	x^3	x	x^3
0	0		
1	1		
		2	8
		3	27
4	64		
5	125		
6	216		
		7	343
		8	512
9	729		

x	x^3	x	x^3
0	0		
1	1		
		2	8
		3	7
4	4		
5	5		
6	6		
		7	3
		8	2
9	9		

Wir beobachten, dass die Abbildung $x \mapsto x^3 \pmod{10}$ auf der Menge $\{0, \ldots, 9\}$ umkehrbar eindeutig ist, d.h. wir können an der letzten Ziffer von x^3 das ursprüngliche x erkennen.

Aufgehende Kubikwurzeln von Zahlen zwischen 1000 und 1000000, (2)

Wenn wir nun eine Zahl zwischen $10^3 = 1000$ und $100^3 = 1000000$ vor uns haben, von der wir zusätzlich wissen, dass sie die dritte Potenz einer zweistelligen ganzen Zahl ist, dann finden wir die Einerstelle durch die letzte Ziffer von x^3 in der vorigen Tabelle.

Die Zehnerstelle ist ebenfalls durch die vorige Tabelle bestimmt: Dazu stellen wir lediglich fest, welche Zahl d man erhält, wenn die letzten drei Ziffern der Kubikzahl weggestrichen werden. Nun suchen wir in der vorigen Tabelle für welches x gilt: $x^3 \leq d$ und $d < (x+1)^3$.

3 Zahlenzauber

Zahlenzauber I

1. Denkt Euch eine beliebige dreistellige Zahl a aus, die einzige Bedingung ist, dass die erste und dritte Stelle unterschiedlich sind (gegebenenfalls vorne mit Nullen auffüllen).
2. Nun bildet die Zahl b, die entsteht indem man die Ziffern von a spiegelt.
3. Berechnet die Zahl $c := \max(a, b) - \min(a, b)$
4. Bildet die Zahl d, die entsteht, indem man die Ziffern von c spiegelt.
5. Nun berechnet $c + d$.

Zahlenzauber II

- Wählt Euch eine Zahl zwischen 1 und 63 aus.
- Mit nur sechs einfachen Fragen kann ich die gewählte Zahl erraten.
- Dazu frage ich Euch, ob die gewählte Zahl auf den folgenden sechs Tafeln vorkommt oder nicht.

Zahlenzauber II, Tafel1 & Tafel2

- Tafel 1:

1	3	5	7	9	11
13	15	17	19	21	23
25	27	29	31	33	35
37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59
61	63				

- Tafel 2:

2	3	6	7	10	11
14	15	18	19	22	23
26	27	30	31	34	35
38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59
62	63				

Zahlenzauber II, Tafel 3 & Tafel 4

- Tafel 3:

4	5	6	7	12	13
14	15	20	21	22	23
28	29	30	31	36	37
38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61
62	63				

- Tafel 4:

8	9	10	11	12	13
14	15	24	25	26	27
28	29	30	31	40	41
42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61
62	63				

Zahlenzauber II, Tafel 5 & Tafel 6

- Tafel 5:

16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	48	49
50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61
62	63				

- Tafel 6:

32	33	34	35	36	37
38	39	40	41	42	43
44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61
62	63				

Zahlenzauber II, Erklärung

Die gewählte Zahl ist: Die Summe der ersten Zahl derjenigen Tafeln, die die gewählte Zahl enthalten.

Erklärung:

- Die Tafeln sind eine versteckte Methode, um die Binärdarstellung der gewählten Zahl zu erfragen.

- Tafel i »fragt nach«, ob 2^{i-1} Bestandteil der Binärdarstellung ist, bzw. ob die i-te Stelle eine 1 oder eine 0 ist.
- Allen Zahlen z auf Tafel i ist gemeinsam, dass für sie gilt:

$$z \mathbin{\&} 2^{i-1} = 2^{i-1}$$

4 Literatur

Literaturverzeichnis

Literatur

[VM65] Vedic Mathematics or Sixteen simple Mathematical Formulae from the Vedas (For One-line Answers to all Mathematical Problems) (ISBN 978-8120801646); Jagadguru Swami Sri Bharati Krishna Tirthaji Maharaja

[PK02] All You Wanted to Know About Vedic Mathematics (ISBN 978-8120723788); Pradeep Kumar; Sterling Publishers

[PM11] Das Kamasutra der Mathematik; Tobias Hürter; PM Magazin, Juni 2011

[GM11] Rechnen mit dem Weltmeister (ISBN 978-3596189892); Gert Mittring; Fischer Taschenbuch Verlag;

5 Sutras auf Englisch

Die sechzehn Sutras (englisch)

1. By one more than the previous one
2. All from 9 and the last from 10
3. Vertically and crosswise (multiplications)
4. Transpose and apply
5. If the Samuccaya is the same (on both sides of the equation, then) that Samuccaya is (equal to) zero
6. If one is in ratio, the other one is zero.
7. By addition and by subtraction.
8. By the completion or non-completion (of the square, the cube, the fourth power, etc.)
9. Differential calculus
10. By the deficiency
11. Specific and general
12. The remainders by the last digit

13. The ultimate (binomial) and twice the penultimate (binomial) (equals zero),
14. By one less than the one before
15. The product of the sum
16. All the multipliers

Die Sub-Sutras (englisch)

1. Proportionately
2. The remainder remains constant
3. The first by the first and the last by the last
4. For 7 the multiplicand is 143
5. By osculation
6. Lessen by the deficiency
7. Whatever the extent of its deficiency, lessen it still further to that very extent; and also set up the square (of the deficiency)
8. By one more than the previous one
9. Last totaling ten
10. The sum of the products
11. By (alternative) elimination and retention (of the highest and lowest powers)
12. By mere observation
13. The product of the sum is the sum of the products
14. On the flag